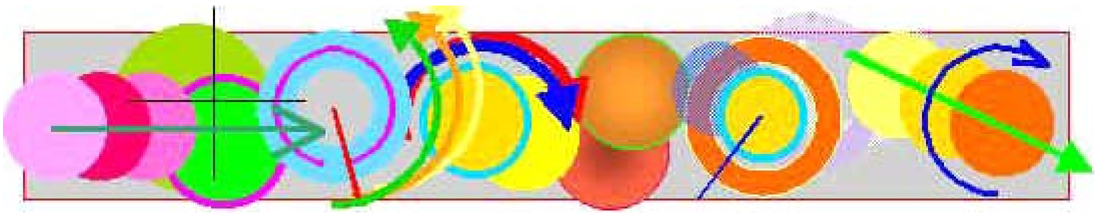
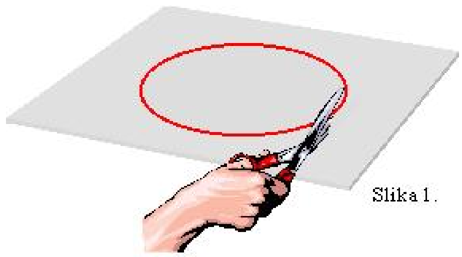


Obodna i kutna brzina

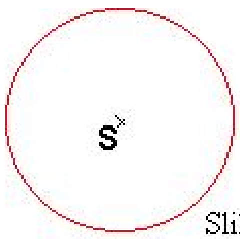
Budući da se gibanje odvija po nekom putu nameće se nekako potreba da o putu saznamo sve što je važno za proučavanje gibanja. Pri tome će nas svakako zanimati duljina puta. A važno je znati i to da li je put ravan ili zakrivljen, da li se uspinje po kosini ili se spušta, kakvo je trenje itd. Kod kružnog gibanja put je kružnica. Stoga ćemo se podsjetiti osnovnih pojmova..

Krug i kružnica su geometrijski pojmovi koje treba razlikovati, jer to nije isto. Krug je dio ravnine, dakle geometrijski lik, a kružnica je zakrivljena crta koja omeđuje krug. Do pogrešnog shvaćanja tih pojmova dolazi uglavnom zato jer se u svakodnevnom govoru riječ krug rabi kad se misli na kružnicu npr.: "Bila je magla, pa smo se vozili u krug vračajući se stalno na isto mjesto."
Da bi upamtili razliku između kruga i kružnice predočit ćemo si slijedeću sliku : ***Iz komada papira možemo izrezati krug, ako škarama režemo po kružnici.*** (Doduše tako izrezani "krug" ima debljinu papira, ali je ta dimenzija tako mala da je možemo zanemariti i smatrati izrezani komad geometrijskim likom) (Sl. 1.)



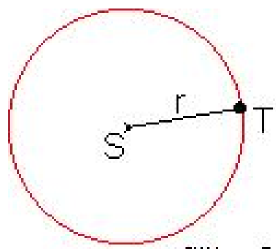
Slika 1.

U opisivanju gibanja po kružnici trebat će nam neki nazivi za točnije sporazumijevanje.



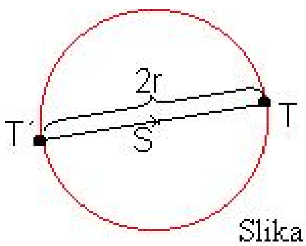
Slika 2.

a) Kružnica je skup točaka ravnine koje su jednako udaljene od jedne točke u istoj ravnini - koju zovemo ***središte***, a na crtežima ćemo tu točku označavati slovom S. (Sl.2.)



Slika 3.

b) Udaljenost od središta S do bilo koje točke na kružnici zove se ***polumjer*** ili *radijus,* a na crtežima ćemo tu dužinu označavati slovom r. (Sl.3.)



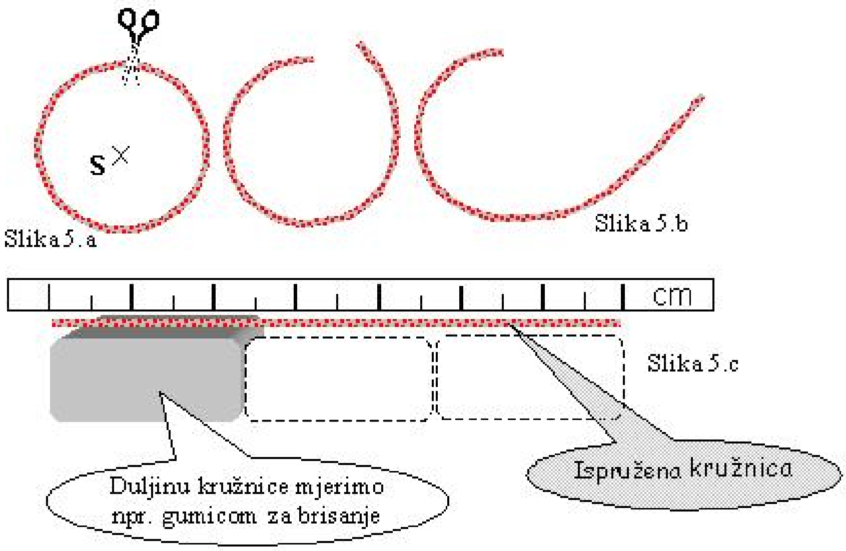
Slika 4.

c) Dužina koja spaja dvije točke na suprotnim stranama kružnice a prolazi središtem zove se ***promjer*** ili *dijametar*. Tu dužinu ćemo označavati kao 2r ili d. (Sl 4.)

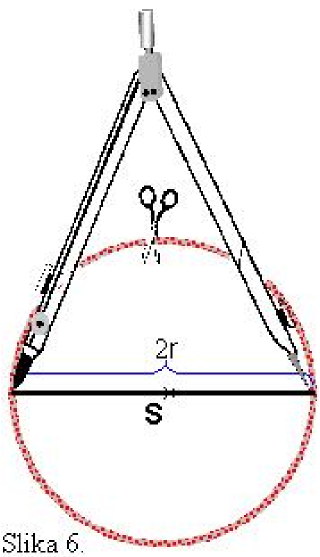
Što je to broj π ?

Za opisivanje kružnog gibanja još je važno je i da razumijemo što je to broj π (grčko slovo pi). Svi znamo koliki je iznos toga broja (π = 3.14.....), ali treba znati odakle potječe taj broj i zašto iznosi upravo toliko. Kako se dolazi do njega i u kakvoj je on vezi s kružnicom.

Da bi odgovorili na postavljena pitanja nacrtat ćemo kružnicu i zamisliti da je načinjena od savitljive niti ili žice, tako da ju na jednom mjestu možemo presjeći škarama. (Sl.5a) Kad je presječena izravnajmo ju i promatrajmo tako ispruženu kružnicu.(Sl 5b) Sad možemo mjeriti njenu duljinu primjenjujući različita mjerila. Npr. centimetar, inč, lakat itd. Možemo čak uzeti bilo koji predmet i stavljajući ga uz ispruženu kružnicu određivati koliko je takovih predmeta dugačka kružnica. Pa ako, recimo, kao mjerilo uzmemo gumicu za brisanje, možemo se pitati koliko "gumica" je dugačka ispružena kružnica? (Sl. 5c)



Ako duljinu ove kružnice izmjerimo centimetrom vidjet ćemo da je dugačka približno 7 cm. Ako ju pak mjerimo npr. gumicom za brisanje dobit ćemo duljinu od oko "3 gumice". Dakle iznos će svaki put ovisiti o upotrebljenoj mjeri, stoga ćemo svaki put dobit drugačiji broj.

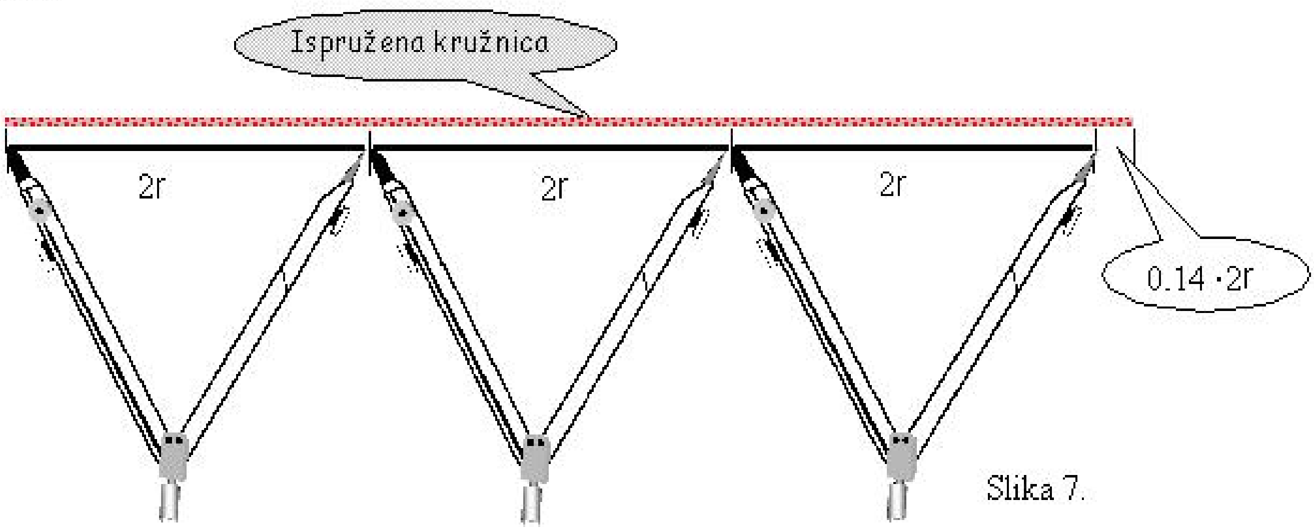


Slika 6.

Mjerenje kružnice njenim promjerom

A sad ćemo za mjeru uzeti promjer ili dijametar kružnice. Možemo promjer uzeti u otvor šestara (Sl. 6.) i nanositi ga na ispruženu kružnicu. (Sl. 7) Kolika god da je kružnica uvijek će promjer na nju stati 3,14... puta. Tim smo postupkom promjer proglasili mjernom jedinicom. Kaže se još da smo *normirali* mjeru.
Dakle ***svaka je kružnica dugačka točno 3,14... svojih promjera***. Taj broj nije racionalan pa umjesto preostalih decimalnih mjesta stoje točkice. Zato ćemo odsad za njegovo označavanje upotrebljavati grčko slovo π.
Zašto je omjer između opsega kružnice i njenog promjera upravo 3,14.. to nitko ne zna, ali se divimo činjenici da je to uvijek kod svake kružnice tako.
Duljina kružnice ili opseg je dakle

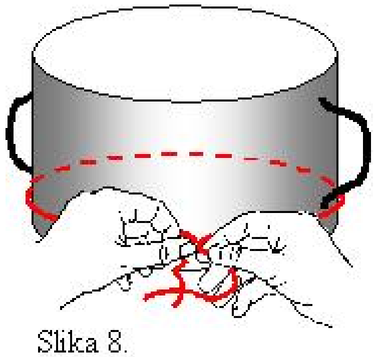
$$O = 2r\pi$$



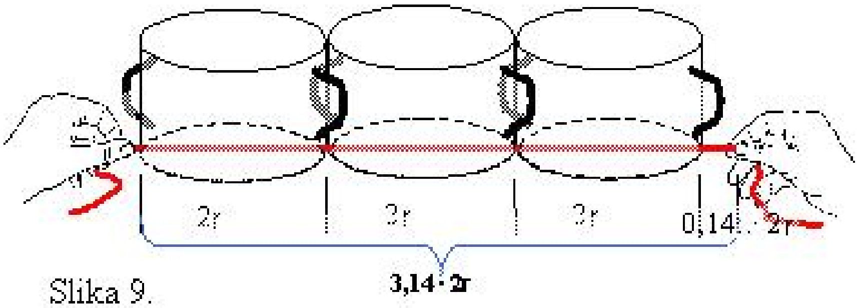
Slika 7.

Ova činjenica o opsegu ili duljini kružnice toliko je značajna da ćemo ju još i pokusom dokazati.

Uzet ćemo bilo kakovu okruglu posudu (npr. lončić ili zdjelu). Zatim ćemo oko posude obaviti konac ili neku nit, kao što rade krojači kad uzimaju mjeru za opseg oko prsa ili struka obavijajući krojački metar oko tijela osobe za koju šiju. (Sl. 8.) Nakon toga ćemo nit ispružiti po stolu i zabilježiti njen početak i kraj. Tako određenu dužinu izmjerit ćemo promjerom posude (Sl. 9.)



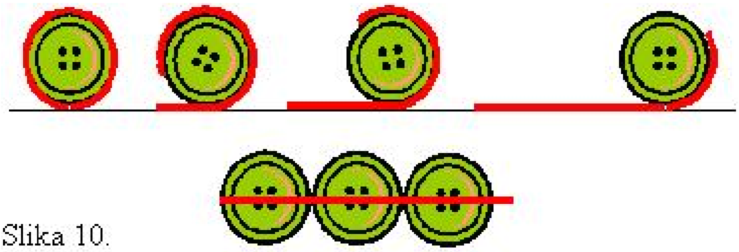
Slika 8.



Slika 9.

Vidimo da u opseg stanu uvijek tri cijela promjera i još malo ostane. To "malo" je onih 0.14... promjera. Ponovimo li ovaj pokus s bilo kojim drugim okruglim predmetom rezultat će uvijek biti isti.

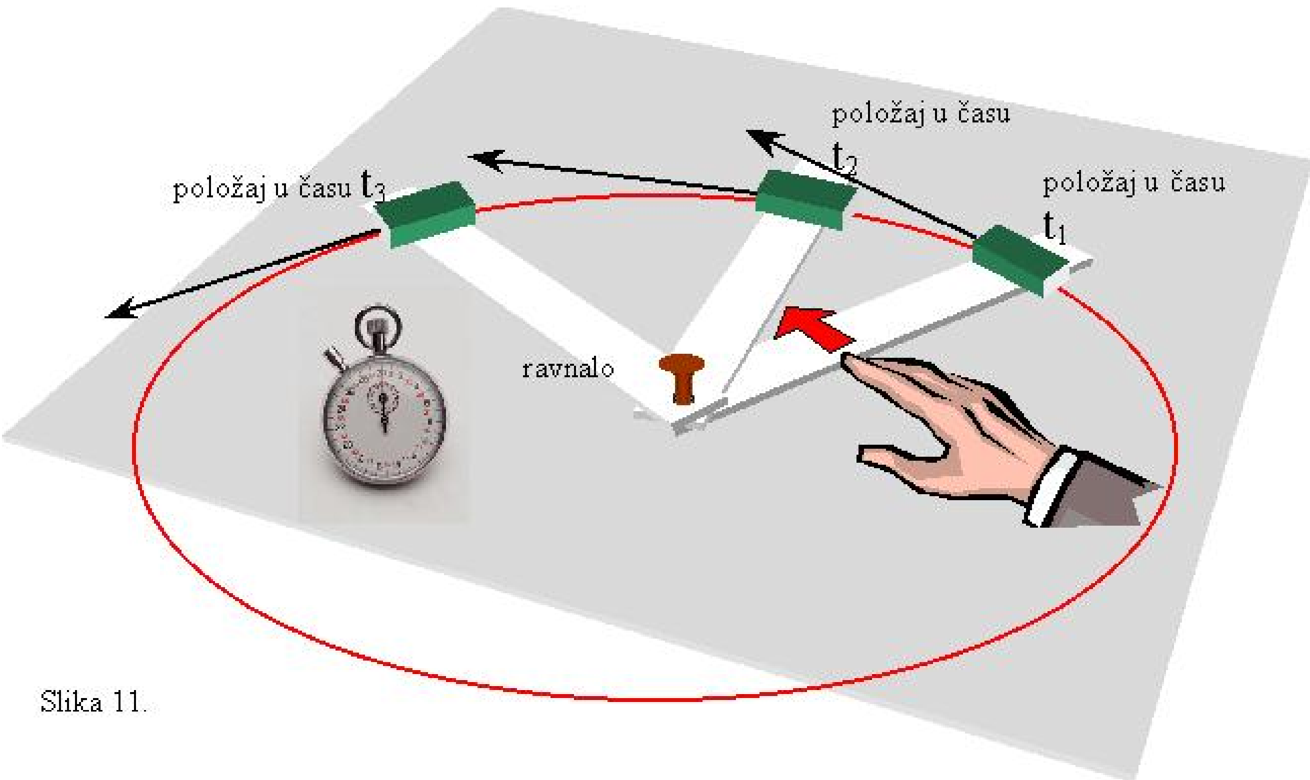
Kad se okruglo tijelo (kotač, bačva, i sl.) kotrlja po nekoj podlozi bez klizanja onda se sa svakim okretom "odmota" po podlozi duljina opsega, a on je uvijek 3,14 puta dulji od promjera. Pa sa svakim okretom tijelo prijeđe put $2r\pi$. (Sl. 10.)



Slika 10.

Što je to obodna brzina?

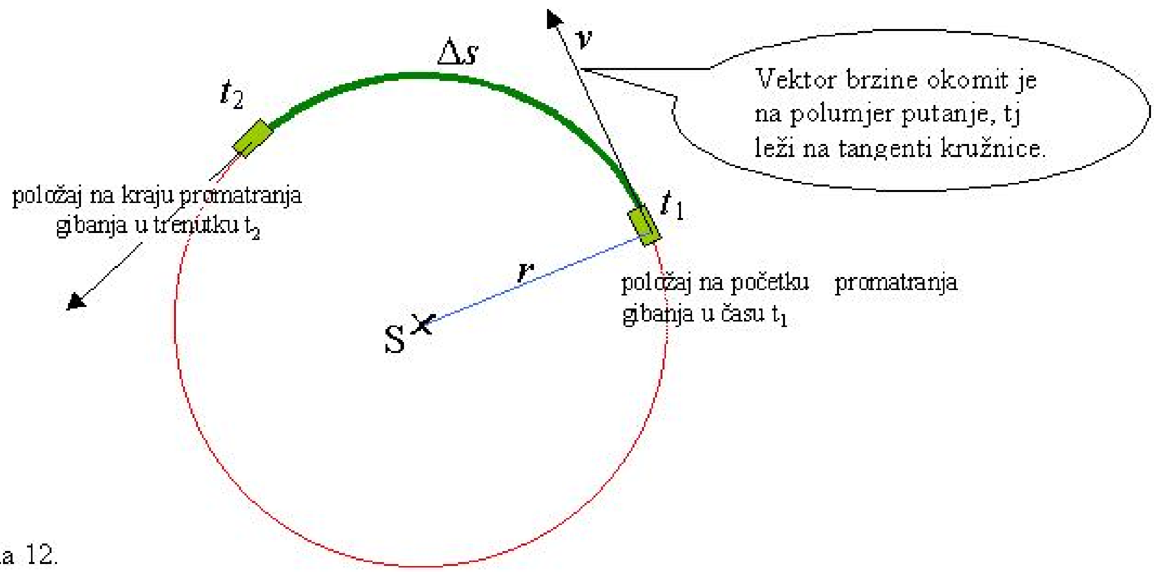
Stavimo na stol ravnalo koje na jednom kraju ima rupu i kroz tu rupu zabijemo čavlić, a na drugi kraj ravnala položimo neko tijelo, na primjer gumicu za brisanje. Tada možemo, gurajući ravnalo rukom, postići da se gumica giba po kružnoj putanji. (Sl. 11.)



Slika 11.

Slično se događa kad jedan krak šestara zabodemo u podlogu a drugi krak jednoliko kruži oko te nepomične točke opisujući kružnicu. U različitim trenucima t_1, t_2, t_3, ... itd. tijelo (gumica) će se naći na različitim položajima svoje kružne putanje. U pojedinim razdobljima prelazit će putove koji su jednaki duljini kružnog luka između pojedinih položaja. Kod gibanja po kružnici tijela imaju brzinu baš kao i kod gibanja po ravnim putanjama.

Dakle, i kod kružnog gibanja brzina je omjer prijeđenog puta i vremena, samo što je put savijen u luk kružnice duljine Δs. (Sl. 12.)



Slika 12.

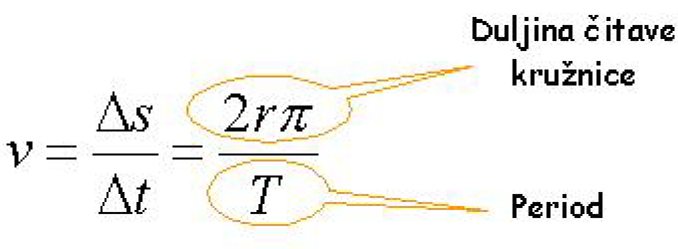
Trajanje gibanja dobit ćemo ako od konačnog vremena t_2 oduzmemo početno vrijeme t_1. Početno i konačno vrijeme očitamo sa zaporne ure kojom mjerimo trajanje gibanja. Odnosno kažemo da je vrijeme gibanja razdoblje ili interval $\Delta t = t_2 - t_1$, a brzina je omjer puta i vremena.

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right] \tag{1}$$

To je ***obodna brzina*** tijela koje jednoliko kruži. Budući da će u istim vremenskim razmacima tijelo prevaljivati jednake putove onda će tako dobiven iznos brzine biti isti bez obzira na kojem dijelu kružnice promatramo gibanje.

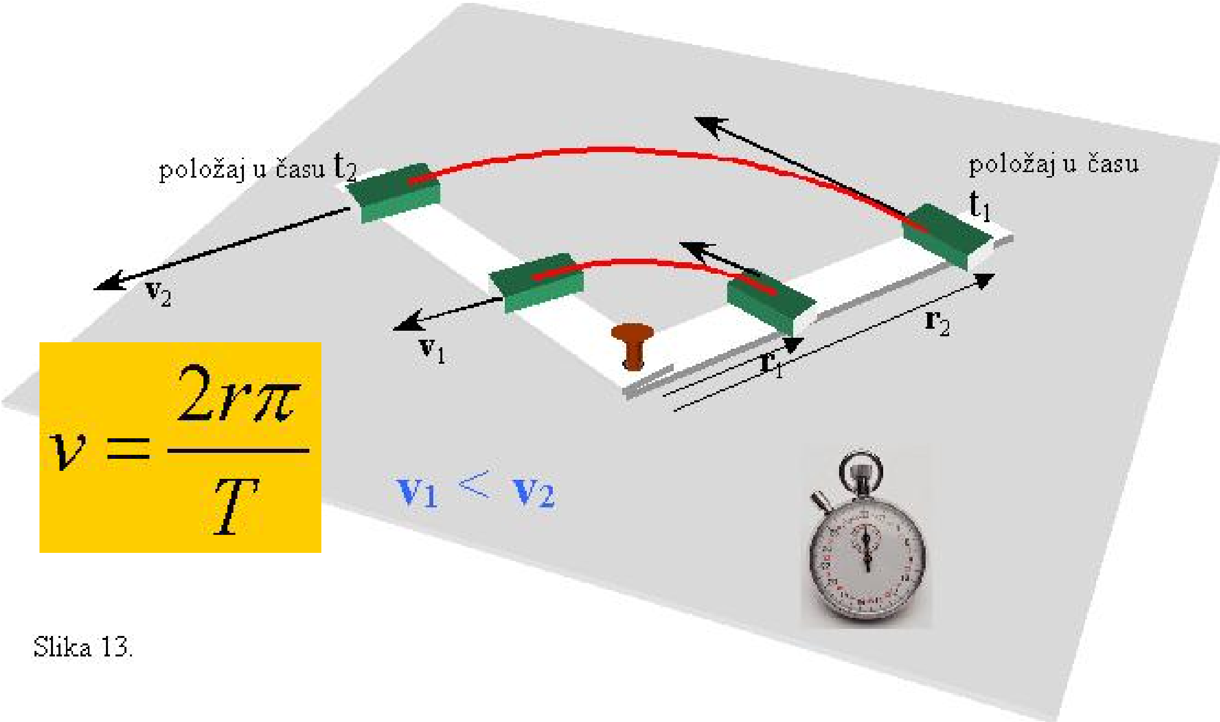
Obodna brzina je vektor, što znači da osim iznosa ima i smjer u prostoru. Njen smjer je u svakom trenutku gibanja takav da s polumjerom zatvara pravi kut. Kažemo da je vektor brzine okomit na polumjer putanje ili da je brzina tangencijalna jer leži na pravcu koji je tangenta kružne putanje.

Jednoliko kruženje odvija se tako da tijelo stalno iznova prelazi isti put, a to je kružnica po kojoj se giba. Budući da se sa svakim obilaskom te kružne putanje gibanje ponavlja, možemo brzinu računati tako da načinimo omjer između duljine čitave kružnice i trajanja jednog obilaska po njoj. Dobit ćemo pri tome isti broj kao i kad smo u omjer stavljali mali odsječak puta Δs i pripadajuće vrijeme Δt.



Time što smo brzinu odredili upravo na jednom obilasku cijele kružnice normirali smo vrijeme, tj. veličina T u nazivniku postala je mjera za put duljine opsega. Vrijeme jednog obilaska kružnice mjereno u sekundama naziva se "period"

Iz ove formule se vidi da je obodna brzina razmjerna polumjeru kružnice. Jer, da smo našu gumicu stavili na ravnalo bliže središtu vrtnje ona bi u istom vremenu prevalila kraći put. Odnosno tijelo koje se s istim periodom giba po kružnici većeg polumjera ima i veću obodnu brzinu (Sl. 13)



Slika 13.

S periodom je u tijesnoj vezi jedna važna fizikalna veličina koju zovemo frekvencija.

Period je trajanje ili vrijeme jednog obilaska u sekundama, a frekvencija je broj koji nam kaže koliko puta tijelo obiđe kružnicu u jednoj sekundi. Period i frekvencija su međusobno recipročne veličine. Na primjer, ako tijelu treba 0,2 sekunde (ili 1/5 sekunde) da obiđe kružnicu, onda u jednoj sekundi tijelo učini 5 obilazaka. Ili, ako period iznosi 4 sekunde onda tijelo u jednoj sekundi izvrši 1/4 okreta, pa kažemo da je frekvencija 0,25 s^{-1}. Jedinica za frekvenciju je [s^{-1}], ili Hertz [Hz]

$$f = \frac{1}{T}\left[s^{-1}\right]$$

$$T = \frac{1}{f}\left[s\right]$$

$$v = 2r\pi \cdot f$$

Sad kad znamo što je frekvencija, možemo izraz za obodnu brzinu pisati u još jednom obliku, tako da opseg kružnice umjesto dijeljenja s periodom pomnožimo s frekvencijom

Što je to kutna brzina?

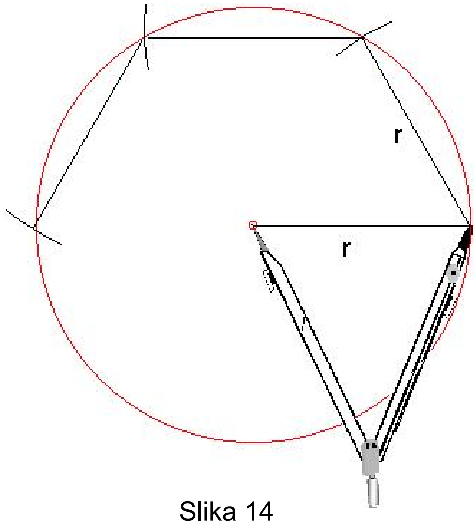
Kod kružnog gibanja tijelo osim obodne brzine ima još jednu veličinu koju zovemo kutna brzina. Kako se već iz samog naziva može nazrijeti kutna brzina je u vezi s kutovima, pa je neophodno da kutove znamo mjeriti različitim mjerama. Jednu od mjera već poznajemo, to su *stupnjevi* (krug podijeljen na 360 dijelova). Druga mjera za kut, koju trebamo znati su radijani. Postoje još i *gradi* (krug podijeljen na 400 dijelova), ali o njima nećemo govoriti jer se ta stara njemačka mjera više ne koristi. Sve tri mjere postoje na džepnim kalkulatorima i treba dobro paziti koja je mjera odabrana tipkom DRG.

Što su to radijani?

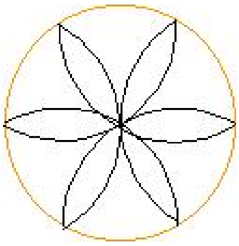
Kutove smo navikli mjeriti u stupnjevima. Oni se dobiju tako da krug podijelimo na 360 jednakih dijelova. Jedan takav dio ravnine je stupanj.

Radijani su mjera za kut koju ćemo također dobiti dijeljenjem kruga ali na drugi broj dijelova. Evo kako:

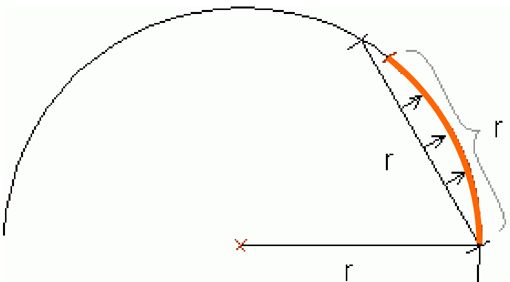
Nacrtat ćemo kružnicu pomoću šestara. Spojimo polumjerom središte s bilo kojom točkom na kružnici, a zatim iz te točke nastavimo nanositi polumjer presijecajući kružnicu šestarom. (Sl. 14)



Slika 14



S koliko ćemo takvih koraka ponovo doći u početnu točku? Očito sa šest koraka. Uostalom šestar se i zove tako jer pomoću njega možemo krug podijeliti na šest jednakih dijelova. Svatko će se sjetiti "cvjetića" koje djeca rado konstruiraju kad se upoznaju sa šestarom.

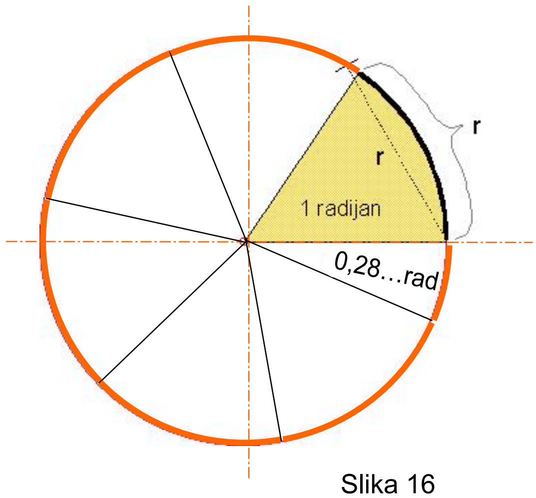


Slika 15

Polumjer položen šestarom pruža se kao tetiva luka. No mi ćemo zamisliti da je polumjer načinjen od neke niti ili konca, tako da ga možemo položiti na samu crtu kružnice (vidi sliku 15). Sad je polumjer postao luk. Spojimo li krajeve tog luka sa središtem kružnice bit će time određen kut od jednog radijana.

Kad smo govorili o broju π vidjeli smo da promjer može stati na kružnicu 3.14… puta, stoga je očito da će polumjer koji je upola kraći stati na kružnicu dvostruko više puta, tj. 6,28…ili 2 π puta. A budući da svaki luk duljine polumjera određuje kut od jednog radijana imat će puni krug 6,28…ili 2π radijana. Sad znamo još jednu mjeru za kutove pa možemo lako pretvarati stupnjeve u radijane i obrnuto:

STUPNJEVI		RADIJANI
0^0	=	0
90^0	=	$\pi/2$
180^0	=	π
270^0	=	$3\pi/2$
360^0	=	2π

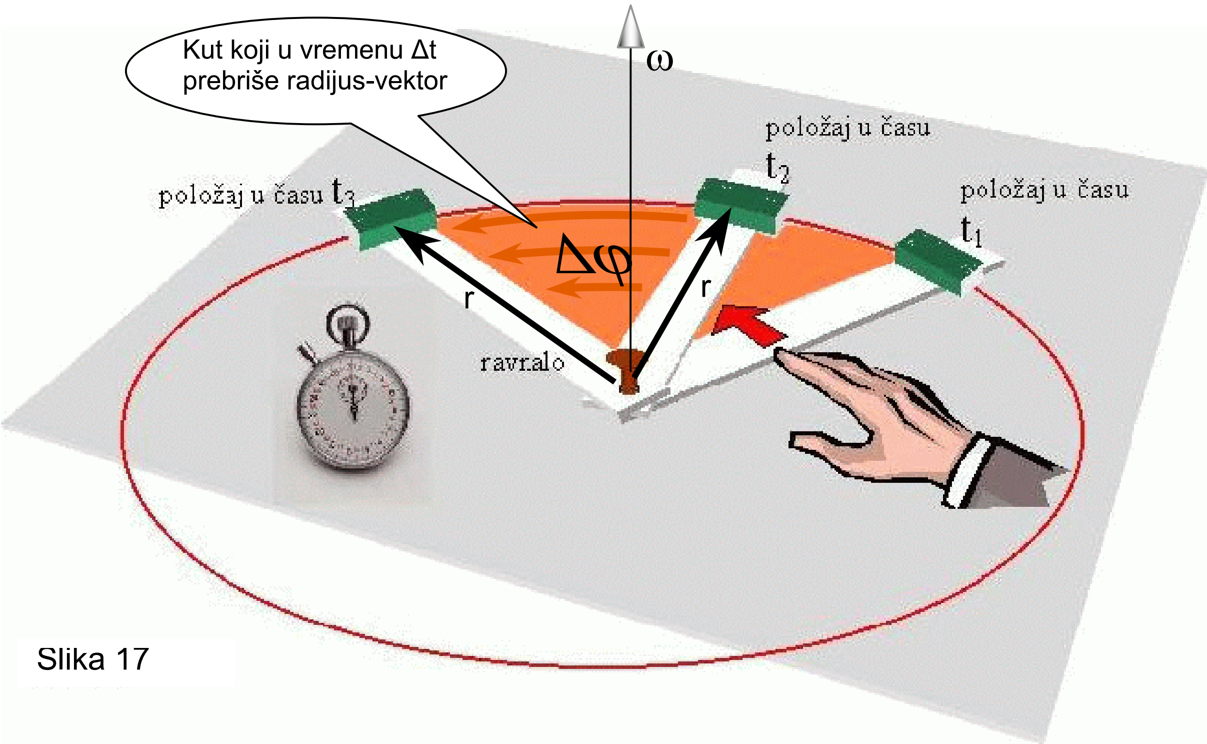


Slika 16

Za pojam kutne brzine važno je upamtiti da puni kut ima **2π** radijana.

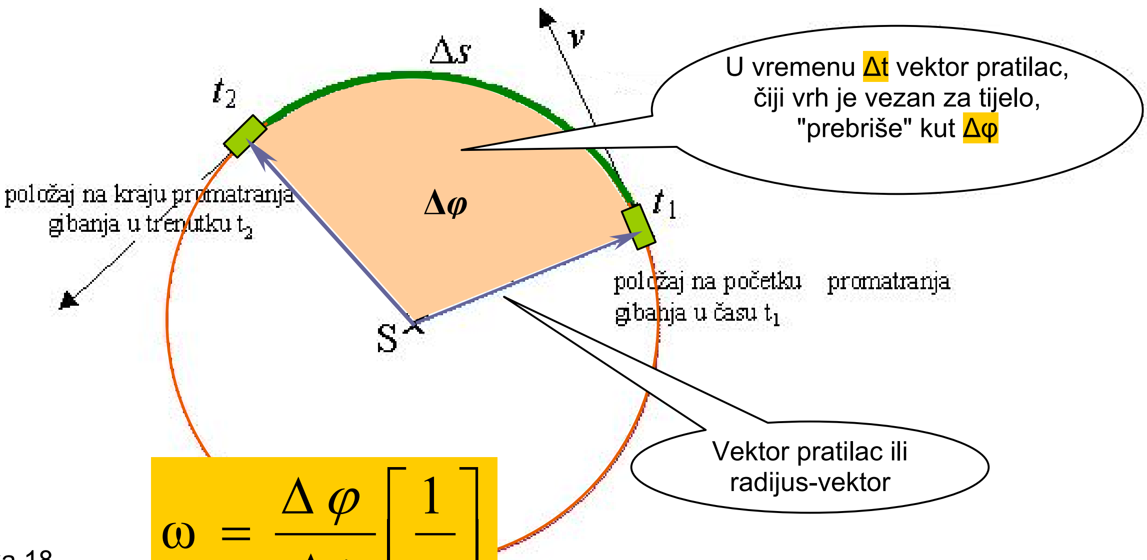
Kutna brzina ….

Vratimo se sada kutnoj brzini. Tijelo koje se giba po zakrivljenoj putanji uvijek ima neku udaljenost od središta zakrivljenosti. Općenito se ta udaljenost mijenja, no kod gibanja po kružnici ona je stalna. Vektor koji se pruža od središta zakrivljenosti putanje do tijela na toj putanji naziva se "vektor pratilac" ili "radijus-vektor". Vrh tog vektora stalno prati tijelo tijekom gibanja, a početak je vezan za središte zakrivljenosti. Kako se vektor pratilac vrti zajedno s tijelom tako njegova dužina prelazi ravninom gibanja i pri tom "prebriše" određeni kut. (Slika 17)



Slika 17

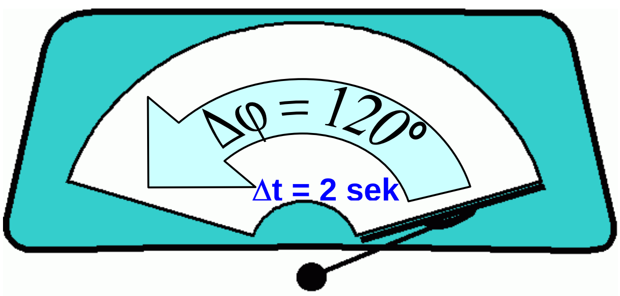
U različitim trenucima t_1, t_2, t_3, ... itd. tijelo (gumica) će se naći na različitim položajima svoje kružne putanje. U pojedinim razdobljima vektor pratilac prebrisat će kutove određene duljinom kružnog luka između pojedinih položaja. Kutna brzina je omjer prebrisanog kuta $\Delta\varphi$ i vremena Δt, a označava se grčkim slovom omega. ω (Sl. 18)



$$\omega = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}\left[\frac{1}{s}\right]$$

Slika 18

Kao primjer kutne brzine poslužit će nam brisač vjetrobranskog stakla na vozilu. Ako od jednog do drugog krajnjeg položaja brisač, na primjer, prebriše kut od 120^0, a za to mu je potrebno recimo 2 sekunde, onda je njegova kutna brzina 60^0 u sekundi.



To je ***kutna brzina*** tijela koje jednoliko kruži. Budući da će u istim vremenskim razmacima radijus-vektor prebrisati jednake kutove onda će tako dobiven iznos kutne brzine biti isti bez obzira na kojem dijelu kružnice promatramo gibanje.

Kutna brzina je vektor. U svakom trenutku taj vektor zatvara pravi kut i s polumjerom i s obodnom brzinom. Kažemo da je vektor brzine okomit na ravninu putanje ili da kutna brzina leži na pravcu koji je os vrtnje tijela. Smjer se određuje pravilom desne ruke – kad prsti pokazuju smjer obodne brzine palac pokazuje smjer kutne brzine.

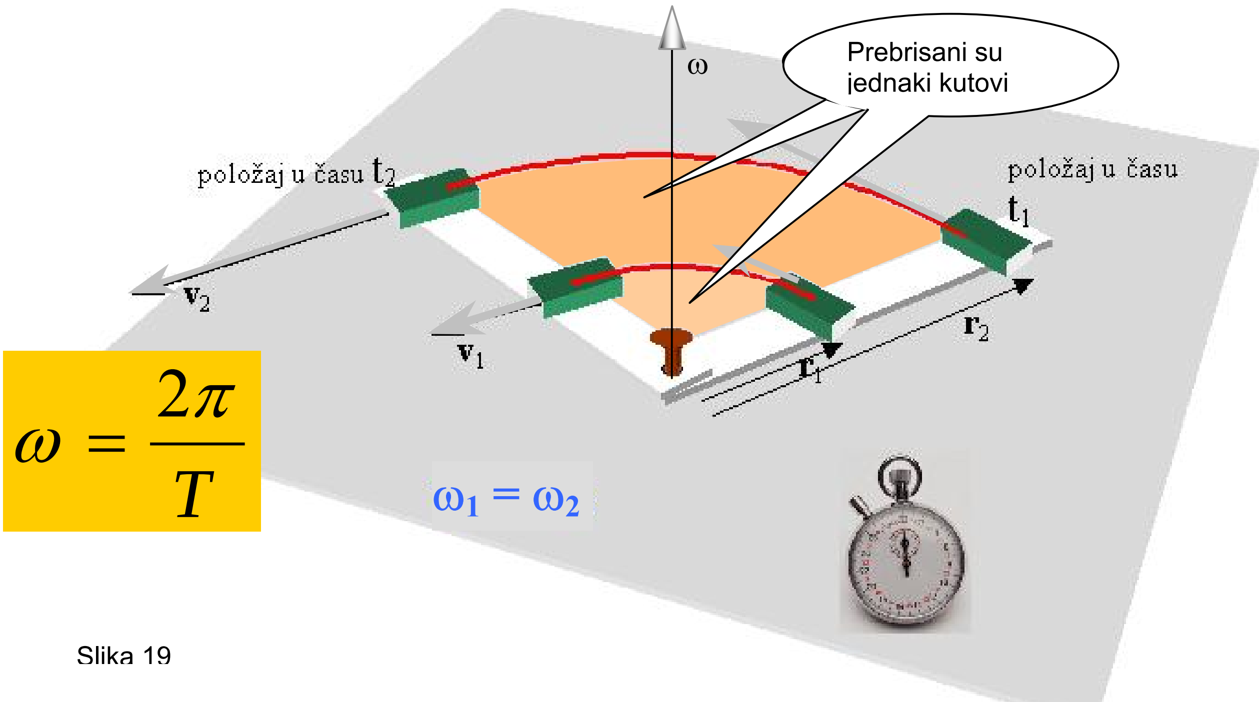
Budući da se sa svakim obilaskom kružne putanje gibanje ponavlja, možemo kutnu brzinu računati tako da načinimo omjer između **punog kuta** i **vremena** potrebnog da se on prebriše, a to je trajanje jednog obilaska po kružnici. Dobit ćemo pri tome isti broj kao i kad smo u omjer stavljali mali odsječak kuta $\Delta\varphi$ i pripadajuće vrijeme Δt. Sad kad znamo što su to radijani puni kut ćemo mjeriti tom mjerom. Radijani nemaju posebnu oznaku za jedinicu, stoga se u formulama ne piše [rad] niti išta drugo. Jedinica za kutnu brzinu je [s^{-1}].

Puni kut u radijanima
$360^0 = 2\pi$ [radijana]

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T}$$

Period

Time što smo kutnu brzinu odredili upravo na jednom obilasku cijele kružnice normirali smo vrijeme na isti način kao i kod obodne brzine. Iz ove formule se vidi da kutna brzina ne ovisi o polumjeru kružnice. Jer, da smo našu gumicu stavili na ravnalo bliže središtu vrtnje njezin bi radijus-vektor u istom vremenu prebrisao isti kut. Odnosno - tijela koja se s istim periodom gibaju po kružnicama različitih polumjera imaju jednaku kutnu brzinu (Sl. 19)



Slika 19

Izraz za kutnu brzinu možemo pisati u još jednom obliku, tako da puni kut (u radijanima) umjesto dijeljenja s periodom pomnožimo s frekvencijom:

$$\omega = 2\pi \cdot f$$

Kakva je veza između obodne i kutne brzine ?

Izveli smo izraze za obodnu i kutnu brzinu, pa pogledajmo kakva je veza među tim izrazima i kako se znajući jednu od tih brzina može izračunati ona druga. To će nam biti od velike koristi u rješavanju zadataka.

OBODNA BRZINA

$$v = \frac{2r\pi}{T}$$

KUTNA BRZINA

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

U izrazu za obodnu brzinu nalazi se izraz 2π/T koji možemo zamijeniti znakom ω jer je to kutna brzina.

$$v = \omega \cdot r \Rightarrow \omega = \frac{v}{r}$$

------ ⌘⌘⌘ -----